4°) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E = z_A - 1$ et $z_F = z_B - 1$.

a) Montrer que $OEAC$ et $OFBC$ sont des parallélogrammes.

b) Construire alors E et F.

c) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{i\frac{7\pi}{6}} - 1$.

d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1)

EXERCICE N°3 : 40' 5 points

I– On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $(E): \frac{1}{4}z^2 - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z - i = 0$.

1°) Vérifier que : $z_1 = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est une solution de l'équation (E).

2°) Déterminer alors l'autre solution z_2 de l'équation (E) puis vérifier que : $z_2 = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II– Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique **2cm**)

Soit A le point d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$.

1°) Montrer que : $Z_H = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_k = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2°) A tout M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-4}{z}$.

a) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $OM \times OM' = 4$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi - \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

3°) Soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectives de H' et K' tels que : $z_{H'} = \frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$.

a) Montrer que $Z_{H'} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_{K'} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Construire les points H' et K'. (Justifier)

EXERCICE N°4 : 40' 5 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$.

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

d) En déduire les solutions : $z^6 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^4 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z^2 - 8i = 0$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn